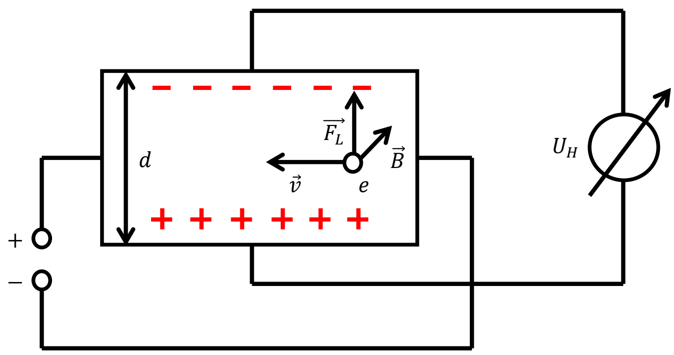
a)

- Der Halleffekt beruht auf der Tatsache, dass geladene sich bewegende Teilchen im Magnetfeld eine Kraft senkrecht zur Bewegungsrichtung und zum Magnetfeld erfahren. Befindet sich eine leitende Platte, an deren enden eine Spannung angelegt ist, in einem Magnetfeld, so erfahren die sich durch die Platte bewegenden Ladungsträger eine Kraft.



  Diese Kraft (die Lorentzkraft) bewirkt eine Ablenkung zur Ober, oder Unterkante hin (je nach Orientierung des Magnetfelds). Weshalb eine Kante Positiv und eine negativ geladen erscheint, somit kann man zwischen Ober-und Unterkante eine Spannung messen, die sogennate Hallspannung.

- Die Elektronen treten mit einer Geschwindigkeit v in das Magnetfeld der Flussdichte B ein, wobei hier B die Komponente Senkrecht zur bewegungsrichtung beschreibt. Die Elektronen erfahren somit die Lorentzkraft $F_L = e \cdot v \cdot B$ und werden durch diese abgelenkt, die Positiven Ladungen (die Atomrümpfe) bleiben hierbei ortsfest. So dass durch die Ladungstrennung ein Elektrisches Feld entsteht. Für die elektrische Feldkraft, die auf die Elektronen wirkt, gilt $F_{el} = e \cdot \frac{U_H}{d}$. Im Gleichgewichtszustand sind die beiden Kräfte gleich groß und es gilt:

$$e \cdot \frac{U_H}{d} = e \cdot v \cdot B$$

  Es gilt also:

$$U_H = B \cdot d \cdot v$$

  Da v und d konstanten sind, gilt $U_H \sim B$.

- Um die Proportionalitätskonstante zu bestimmen, benötigt man ein Magnetfeld bekannter Flussdichte, hierfür kann z.B. eine langestreckte Spule, eine Helmholtzspulenpaar oder ein geeichter permanentmagnet verwendet werden. Dann nimmt man zu bekannter Flussdichte die Hallspannung U_H auf, die Proportionalitätskonstante ist dann der Quotient $\frac{U_H}{B}$. Die Proportionalitätskonstante wird besser, wenn man mehrere Wertepaare zu verschiedenen Flussdichten verwendet und Hallspannungen verwendet und dann die verschiedenen Konstanten mittelt.

b)

- Zwischen den Punkten A und B wird eine Spannung induziert, da die Elektronen in der unteren Spulenseite beim bewegen im Magnetfeld eine Kraft erfahren (Lorentzkraft). Die Polung der Spulenenden kann man mittels der Dreifingerregel der linken Hand bestimmen.
  - Der Daumen zeigt in die Bewegungsrichtung der Elektronen, also nach unten.
  - Der Zeigefinger zeigt in die Richtung des Magnetfelds, somit in die Zeichenebene hinein.
  - Der Mittelfinger weist in Richtung der Lorentzkraft, diese wirkt nach links.

Es entsteht somit im Punkt A ein Elektronenüberschuss, es entsteht somit bei A ein Minuspol und bei B entsteht ein Elektronenmangel, somit ist dort ein Pluspol.

- Die Elektronen erfahren durch den Eintauchvorgang eine Lorentzkraft mit dem Betrag:

$$F_L = e \cdot v \cdot B$$

Durch die Ladungstrennung entsteht ein Elektrisches Feld, durch welches die Elektronen eine Kraft von

$$F_{el} = e \cdot \frac{U_{ind}}{d}$$

Im gleichgewichtszustand sind die beiden Kräfte gleich groß und es gilt:

$$e \cdot v \cdot B = e \cdot \frac{U_{ind}}{d}$$

Somit gilt für die induzierte Spannung:

$$U_{ind} = B \cdot v \cdot d$$

Da die Spule nun n Windungen besitzt gilt für die zwischen den Enden A und B induzierte Spannung:

$$U_{ind} = n \cdot B \cdot v \cdot d$$

Die zur unteren Seite senkrecht stehenden Leiterseiten tragen nichts zur induzierten Spannung bei da die Ladungsverschiebung horizontal erfolgt. Nach B aufgelöst folgt für die Flussdichte:

$$B = \frac{U_{ind}}{n \cdot v \cdot d} = \frac{36 \cdot 10^{-3}}{100 \cdot 0,02 \cdot 0,04}\ \mathrm{T} = 0,45\ \mathrm{T}$$

- Eine Spannung wird nur dann induziert, wenn sich der Magnetische Fluss $\Phi = B \cdot A$ ändert, dies ist der Fall, wenn die Spule anfängt in das Magnetfeld einzutreten bis sie sich komplett im Magnetfeld befindet. D.h. es muss zunächst die Zeit bestimmt werden, bis die Spule beginnt in das Magnetfeld einzutreten und der Zeitpunkt, zu welchem die Spule sich gerade komplett im Magnetfeld befindet.
Für den freien Fall gilt $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ und $v = a \cdot t$. Für die Zeit t_1 bis die Spule in des Magnetfeld eintritt gilt:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,05}{9,81}} \approx 0,10\ \mathrm{s}$$

Und für den Zeitpunkt t_1 zu welchem die Spule sich komplett im Magnetfeld befindet gilt:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,11}{9,81}} \approx 0,15\ \mathrm{s}$$

Die überstrichene Fläche $A(t)$ ist das Produkt aus dem zurückgelegten Weg und der Breite der Unterkante, es gilt für $A(t)$:

$$A(t) = s(t) \cdot d = \frac{1}{2} \cdot d \cdot g \cdot t^2$$

Somit gilt für den Magnetischen Fluss $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0,10\ \mathrm{s} \\ \frac{1}{2} \cdot B \cdot d \cdot g \cdot t^2 & \text{für } 0,10\ \mathrm{s} \leq t \leq 0,15\ \mathrm{s} \\ B \cdot A & \text{für } 0,15\ \mathrm{s} \leq t \end{cases}$$

Die Induzierte Spannung in Abhängigkeit der Zeit folgt nun aus dem Induktionsgesetz $U_{ind} = -n \cdot \dot{\Phi}$ mit $\dot{\Phi}$:

$$\dot{\Phi}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0,10 \text{ s} \\ B \cdot d \cdot g \cdot t & \text{für } 0,10 \text{ s} \leq t \leq 0,15 \text{ s} \\ 0 & \text{für } 0,15 \text{ s} \leq t \end{cases}$$

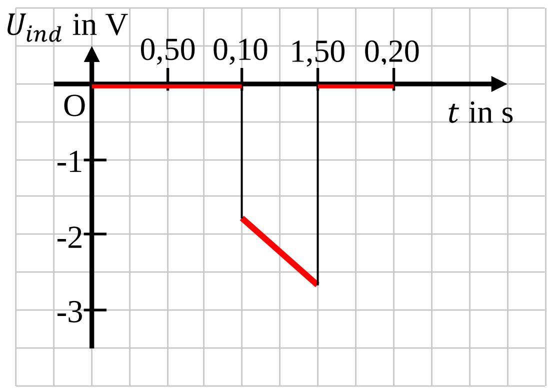
Somit gilt für die induzierte Spannung:

$$U_{ind}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0,10 \text{ s} \\ -n \cdot B \cdot d \cdot g \cdot t \text{ V} & \text{für } 0,10 \text{ s} \leq t \leq 0,15 \text{ s} \\ 0 & \text{für } 0,15 \text{ s} \leq t \end{cases}$$

Es folgt also für die zwischen t_1 und t_2 in abhängigkeit der Zeit induzierten Spannung:

$$U_{ind}(t) = -n \cdot B \cdot d \cdot g \cdot t = -100 \cdot 0,45 \cdot 0,04 \cdot 9,81 \cdot t \ \frac{\text{V}}{\text{s}} \approx -17,7 \cdot t \ \frac{\text{V}}{\text{s}}$$

Vor dem Eintritt in das Magnetfeld ändert sich der Magnetische Fluss nicht, genauso, wenn sich die Spule komplett im Magnetfeld befindet, so dass in diesen Zeiträumen die Induzierte Spannung gleich 0 ist. In dem Zeitraum, in dem die Spule in das Magnetfeld eintritt nimmt die induzierte Spannung zu, da die Spule beschleunigt in das Magnetfeld hineinfällt und sich der magnetische Fluss dadurch schneller ändert.



Bemerkung: Ein an der x-Achse gespiegeltes Schaubild ist genauso richtig.

c)
- Zunächst muss man zur Beschreibung der Elektronenbahn ein Koordinatensystem festlegen, hierbei liegt der Ursprung an der Eintrittsstelle der Elektronen in den Kondensator. Die x-Achse weist hierbei nach rechts und die y-Achse nach oben. Man kann nun die Bewegung der Elektronen in zwei Teilbewegungen zerlegen, in eine gleichförmige Bewegung in x-Richtung und eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung in y-Richtung:

$$x(t) = v_0 \cdot t \qquad\qquad y(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Nun wird y in Abhängigkeit von x bestimmt:

$$y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{x^2}{v_0^2}$$

Tritt das Elektron in den Kondensator ein, so erfährt es eine Kraft in positive y-Richtung. Für diese Kraft gilt:

$$F_{el} = e \cdot \frac{U_y}{d}$$

Weiter gilt aber auch nach Newton für die Kraft: $F = m \cdot a$, somit folgt für die Beschleunigung a

$$m \cdot a = e \cdot \frac{U_y}{d} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{e \cdot U_y}{m \cdot d}$$

Somit lautet die Gleichung der Bahnkurve:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{x^2}{v_0^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot U_y}{m \cdot d \cdot v_0^2} \cdot x^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 1200}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 0,08} \cdot \frac{x^2}{v_0^2} \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1,32 \cdot 10^{15} \cdot \frac{x^2}{v_0^2} \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}
\end{aligned}
$$

- Die Elektronen treffen genau dann auf die Obere Platte, wenn sie in y-Richtung eine Strecke von 4,0 cm zurückgelegt haben, während sie in x-Richtung eine Strecke kleiner als 10,0 cm zurückgelegt haben. Hierzu löst man die Bahngleichung nach v_0 auf:

$$
v_0 = \sqrt{1,32 \cdot 10^{15} \cdot \frac{x^2}{y} \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \sqrt{1,32 \cdot 10^{15} \cdot \frac{0,1^2}{0,04}} \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 1,8 \cdot 10^7 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
$$

  Ist die Eintrittsgeschwindigkeit kleiner als $1,8 \cdot 10^7 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, so treffen die Elektronen auf die Obere kondensatorplatte.

- Damit die Elektronen ungehindert den Kondensator durchlaufen können, müssen sich die Elektrische Feldkraft und die Lorentzkraft gegenseitig aufheben, d.h. sie müssen entgegengerichtet sein. Die Orientierung des Magnetfelds lässt sich mit der Dreifingerregel der linken Hand bestimmen.
  - Der Daumen zeigt in Bewegungsrichtung, also nach rechts.
  - Der Zeigefinger gibt die Richtung des Magnetfelds an.
  - Der Mittelfinger zeigt in Richtung der Kraft, also nach unten.

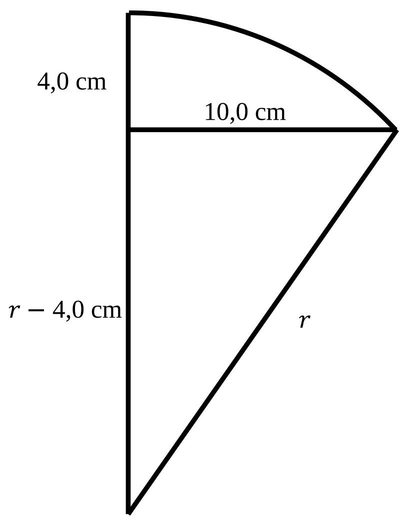
  Somit muss also das Magnetfeld in die Zeichenebene hinein zeigen.

- Den Betrag der Flussdichte B lässt sich aus der Bedingung herleiten, dass die elektrische Kraft so groß sein muss wie die Lorentzkraft $F_L = F_{el}$:

$$
\begin{aligned}
e \cdot v \cdot B &= e \cdot \frac{U_y}{d} \\
B &= \frac{U_y}{v \cdot d} = \frac{1200}{0,08 \cdot 1,8 \cdot 10^7} \text{ T} \approx 8,33 \cdot 10^{-4} \text{ T} = 0,83 \text{ mT}
\end{aligned}
$$

- Besitzen die Elektronen eine kleinere Geschwindigkeit, so ist wegen $F_L \sim v$ auch die Lorentzkraft kleiner, die elektrische Kraft aufgrund des Feldes ist unabhängig von der Geschwindigkeit, weshalb die Elektronen eine resultierende Kraft nach oben erfahren und somit zu oberen Kondensatorplatte hin abgelenkt werden.

- Wird die Ablenkspannung ausgeschaltet, so wirkt auf die Elektronen nur noch die Lorentzkraft als Zentripetalkraft, d.h. die Bahn der Elektronen beschreibt einen Kreisbogen. Dieser Kreisbogen muss so flach sein, dass die Elekronen nach Eintritt nicht auf der Kondensatorplatte auftreffen. Den Radius dieser Kreisbahn kann man mittels einfacher Geometrie aus der neben stehenden Skizze ermitteln. Nach Pythagoras gilt:



$$
(r - 4 \text{ cm})^2 + (10 \text{ cm})^2 = r^2
$$

$$
\begin{aligned}
r^2 - 8\text{ cm}\cdot r + 16\text{ cm}^2 + 100\text{ cm}^2 &= r^2\\
8\text{ cm}\cdot r &= 116\text{ cm}^2\\
r &= 14,5\text{ cm}
\end{aligned}
$$

Die entsprechende Geschwindigkeit erhält man aus der Bedingung $F_L = F_Z$:

$$
\begin{aligned}
e\cdot v\cdot B &= \frac{m\cdot v^2}{r}\\
v &= \frac{e\cdot r\cdot B}{m} = \frac{1,60\cdot 10^{-19}\cdot 0,145\cdot 0,83\cdot 10^{-3}}{9,11\cdot 10^{-31}}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,1\cdot 10^{7}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}
\end{aligned}
$$

D.h. ist die Geschwindigkeit größer als $2,1\cdot 10^7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, so können die Elektronen den Feldbereich wieder verlassen.

Bemerkung: Man kann bei dieser Aufgabe ebenfalls eine Geschwindigkeit v_2 bestimmen, bei welcher die Elektronen eine Kreisbahn mit Radirus $r_2 \leq 2$ cm im Kondensator beschreiben, diese ist jedoch nach Aufgabenstellung nicht zu bestimmen, da in diesem Fall die Elektronen den Kondensator nicht mehr verlassen können.